ISSN 0002-3574 (print)
УДК 539.3

Поступила в редакцию 22.03.2016
Received 22.03.2016

О. Л. Швед

Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

УЧЕТ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПИИ ТРИКЛИННОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Рассматривается вопрос о деформационной упругой анизотропии в конкретной модели нелинейной упругопластичности, который представляется важным потому, что чрезмерный рост анизотропии вызывает согласно полученному критерию разрушения непредсказуемо раннее появление макротрещин вследствие пластической деформации.

Свойства материала описываются обобщенным законом упругости Мурнагана. Первоначально материал предполагается изотропным и значения величин параметров анизотропии являются нулевыми. Определяющее уравнение для удельной потенциальной энергии упругой деформации (потенциала напряжений) записывается при общем виде анизотропии – триклинной. Отыскиваются возможные ограничения на параметры для трансверсально-изотропного, ортотропного и моноклинного материалов. Для триклинного материала ненулевыми могут быть все 77 параметров, для моноклинного – 45, для остальных видов анизотропии – 29 параметров. Для трансверсально-изотропного материала найдены ограничения в виде однородных линейных уравнений. Получены также ограничения для кубически-изотропного материала, которые можно использовать только в теории упругости, поскольку данная анизотропия является недеформационной.

Выписывается второе определяющее уравнение в конечном виде для тензора напряжений Коши. Активный упругопластический процесс происходит попеременным чередованием пластических и упругих состояний материала. Рост анизотропии наблюдается в пластическом состоянии (при течении). Вводятся 3 дифференциальных определяющих уравнения при течении: для потенциала напряжений, тензора напряжений и параметров анизотропии. Определяется неотрицательный параметр роста анизотропии. Из системы уравнений находятся скорости меры упругих искажений и параметр роста, для которого реализована процедура его минимизации. Проверяется пригодность последнего уравнения для описания полученных ограничений. Установлено, что все они выполняются за исключением части ограничений для трансверсально-изотропного материала, поэтому при одноосных нагружениях указанное уравнение следует дополнить 12 линейными однородными уравнениями.

Ключевые слова: упругопластичность, закон Мурнагана, упругая анизотропия, триклинный материал, параметры анизотропии, определяющее уравнение.

O. L. Shved

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

CONSIDERING THE INCREASE IN ELASTIC ANISOTROPY OF TRICLINIC ELASTIC-PLASTIC MATERIAL

The task of deformation of elastic anisotropy in a specific nonlinear elastic-plastic model is considered. According to a given criterion, the excessive growth of anisotropy causes the unexpectably early appearance of macrocracks due to plastic deformation.

The elastic properties of material are described by the generalized Murnaghan law of elasticity. Initially, the material is assumed to be isotropic, and the values of anisotropy parameters are zero. The defining equation for the potential energy density of elastic deformation (stress potential) is written in the general form of anisotropy – triclinic. Possible restrictions for transversely isotropic, orthotropic and monoclinic materials were under search. For triclinic material, all seventy seven parameters can be nonzero. For monoclinic material, forty five parameters can be nonzero, and for other types of anisotropy – twenty nine. For transversely isotropic material, the restrictions in the form of homogeneous linear equations are found. Also, the restrictions on cubic-isotropic materials are found, which can be used only in the theory of elasticity, as this anisotropy is nondeformation.

The second defining equation in finite form for the Cauchy stress tensor is written. An active elastic-plastic process takes place through an alternate alternation of plastic and elastic material states. The growth of anisotropy occurs in the plastic state (in flow). We introduce three differential equations in flow: for voltage potential, stress tensor and anisotropy parameters. The nonnegative parameter of the anisotropy growth is determined. The system of equations yields the measure speed of elastic distortions and the growth parameter to implement the minimization procedure. The suitability of the last equation to describe the derived constraints is checked. It is found that all of them are performed, but for the part of restrictions for transversely isotropic material. Therefore, for uniaxial loadings this equation should be complemented by twelve homogeneous linear equations.

Keywords: elastic-plastic, Murnaghan law, elastic anisotropy, triclinic material, anisotropic parameters, defining equation.

Теоретическое описание роста упругой анизотропии в результате пластической деформации является сложной проблемой и не имеет удовлетворительного решения для нелинейных моделей упругопластичности [1]. Модель материала, предложенная в [2], использует закон упругости Мурнагана [3, 4], который позволяет учитывать рост упругой анизотропии. Критерий разрушения не требует введения параметра повреждаемости [5] и вытекает из сути математической модели [2]. Причиной разрушения является рост упругой анизотропии [6], поэтому правильное его описание имеет важное значение. Возрастающую по сложности анизотропии иерархию моделей упругопластичности удобно представить виде последовательности трансверсально-изотропного, ортотропного, моноклинного и триклинного материалов. Причем переход от изотропии к более сложной анизотропии может осуществляться и непоследовательно. Будем исходить из общих зависимостей для триклинного материала при получении возможных ограничений на параметры анизотропии в частных случаях. Они будут несколько отличаться от соотношений, где часть параметров не учитывалась [6]. Поскольку модель упругопластичности связана с конкретным сложным анизотропным законом, то может проявляться неустойчивость при расчете упругопластического процесса. Целью настоящей работы является рациональный учет деформационного роста упругой анизотропии в модели материала [2]. Требуется установить возможные ограничения на параметры, постулировать определяющее уравнение для параметров анизотропии, проверить пригодность уравнения для их описания, а также минимизировать рост анизотропии.

Подход Мурнагана заключается в представлении удельной потенциальной энергии упругой деформации полиномом по степеням компонент тензора Коши – Грина **C**:

$$\text{э} = \text{э}_0 + \text{э}_2 + \text{э}_3 + c, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\text{э}_2 = {} & \sum(\delta_i(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i)^2 + \delta_{3+i}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i + \delta_{11+i}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i + \delta_{15+i}\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i) + \\
& + \delta_7(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2)^2 + \delta_{11}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^2 + \delta_{15}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^2 + \delta_8\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \delta_9\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \\
& + \delta_{10}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{19}\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{20}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{21}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{э}_3 = {} & \sum\delta_{21+i}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i)^3 + \delta_{25}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1)^2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \delta_{26}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1)^2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{27}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1 + \\
& + \delta_{28}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{29}(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1 + \delta_{30}(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \delta_{31}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \\
& + (\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^2\sum\ \delta_{31+i}\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i + \delta_{35}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{36}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{37}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \\
& + \delta_{38}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{39}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \delta_{40}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{41}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \\
& + \delta_{42}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1)^2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\sum\delta_{40+3i}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i)^2 + \mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\sum\delta_{41+3i}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i)^2 + \delta_{45}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \\
& + \delta_{48}(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \delta_{51}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2)^2 + \delta_{52}\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2)^2 + \delta_{53}\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2)^2 + \\
& + \delta_{54}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2)^3 + \delta_{55}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^3 + \delta_{56}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^3 + (\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3)^2\sum\delta_{56+i}\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i + \delta_{60}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \\
& + \delta_{61}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{62}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{63}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \\
& + \delta_{64}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{65}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{66}\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \\
& + \delta_{67}\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{68}\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\sum\ \delta_{66+3i}\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i + \\
& + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\sum\ \delta_{67+3i}\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\sum\ \delta_{68+3i}\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i,
\end{aligned} \tag{3}$$

где э_2, э_3 – анизотропные структуры второй и третьей степени; c – минимальная постоянная, обеспечивающая условие $\text{э} \geq 0$; начальные значения параметров анизотропии $\delta_j = 0$ ($j = 1,2,\ldots,77$), и тогда э с точностью до постоянной переходит в изотропный потенциал э_0 [3], $i = 1,2,3$.

В покомпонентном представлении тензора **C** и полученного его ортогональным преобразованием тензора **C′** в неподвижном ортонормированным базисе $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= x_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + x_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1) + x_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1) + x_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2), \\ \mathbf{C}' &= y_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + y_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + y_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + y_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1) + y_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1) + y_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2), \end{aligned} \tag{4}$$

где x_i, y_i – компоненты в тензорном представлении **C**, **C′**, а тензоры $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j$ – базисные диады [3]. Из (2), (4) и (3), (4) получаем соответственно

$$\begin{aligned} &э_2(\mathbf{C}) - э_2(\mathbf{C}') = \sum(\delta_i(x_i^2 - y_i^2) + \delta_{3+i}(x_ix_4 - y_iy_4) + \delta_{11+i}(x_ix_5 - y_iy_5) + \delta_{15+i}(x_1x_6 - y_1y_6)) + \\ &+\delta_7(x_4^2 - y_4^2) + \delta_{11}(x_5^2 - y_5^2) + \delta_{15}(x_6^2 - y_6^2) + \delta_8(x_1x_2 - y_1y_2) + \delta_9(x_2x_3 - y_2y_3) + \\ &+\delta_{10}(x_1x_3 - y_1y_3) + \delta_{14}(x_3x_5 - y_3y_5) + \delta_{19}(x_4x_5 - y_4y_5) + \delta_{20}(x_4x_6 - y_4y_6) + \delta_{21}(x_5x_6 - y_5y_6), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &э_3(\mathbf{C}) - э_3(\mathbf{C}') = \sum\delta_{21+i}(x_i^3 - y_i^3) + \delta_{25}(x_1^2x_2 - y_1^2y_2) + \delta_{26}(x_1^2x_3 - y_1^2y_3) + \delta_{27}(x_2^2x_1 - y_2^2y_1) + \\ &+\delta_{28}(x_2^2x_3 - y_2^2y_3) + \delta_{29}(x_3^2x_1 - y_3^2y_1) + \delta_{30}(x_3^2x_2 - y_3^2y_2) + \delta_{31}(x_1x_2x_3 - y_1y_2y_3) + \\ &+\sum\delta_{31+i}(x_5^2x_i - y_5^2y_i) + \delta_{35}(x_4^2x_5 - y_4^2y_5) + \delta_{36}(x_4^2x_6 - y_4^2y_6) + \delta_{37}(x_5^2x_4 - y_5^2y_4) + \\ &+\delta_{38}(x_5^2x_6 - y_5^2y_6) + \delta_{39}(x_6^2x_4 - y_6^2y_4) + \delta_{40}(x_6^2x_5 - y_6^2y_5) + \delta_{41}(x_4x_5x_6 - y_4y_5y_6) + \\ &+\delta_{42}(x_1^2x_4 - y_1^2y_4) + \sum\delta_{40+3i}(x_i^2x_5 - y_i^2y_5) + \sum\delta_{41+3i}(x_i^2x_6 - y_i^2y_6) + \delta_{45}(x_2^2x_4 - y_2^2y_4) + \\ &+\delta_{48}(x_3^2x_4 - y_3^2y_4) + \delta_{51}(x_4^2x_1 - y_4^2y_1) + \delta_{52}(x_4^2x_2 - y_4^2y_2) + \delta_{53}(x_4^2x_3 - y_4^2y_3) + \delta_{54}(x_4^3 - y_4^3) + \\ &+\delta_{55}(x_5^3 - y_5^3) + \delta_{56}(x_6^3 - y_6^3) + \sum\delta_{56+i}(x_6^2x_i - y_6^2y_i) + \delta_{60}(x_1x_2x_4 - y_1y_2y_4) + \\ &+\delta_{61}(x_1x_2x_5 - y_1y_2y_5) + \delta_{62}(x_1x_2x_6 - y_1y_2y_6) + \delta_{63}(x_1x_3x_4 - y_1y_3y_4) + \\ &+\delta_{64}(x_1x_3x_5 - y_1y_3y_5) + \delta_{65}(x_1x_3x_6 - y_1y_3y_6) + \delta_{66}(x_2x_3x_4 - y_2y_3y_4) + \\ &+\delta_{67}(x_2x_3x_5 - y_2y_3y_5) + \delta_{68}(x_2x_3x_6 - y_2y_3y_6) + \sum\delta_{66+3i}(x_ix_4x_5 - y_iy_4y_5) + \\ &+\sum\delta_{67+3i}(x_ix_4x_6 - y_iy_4y_6) + \sum\delta_{68+3i}(x_ix_5x_6 - y_iy_5y_6). \end{aligned} \tag{6}$$

Скаляр инвариантный в группе симметрии трансверсальной изотропии остается неизменным при преобразовании поворота на любой угол φ вокруг направления ее оси **c** [3]:

$$\begin{gathered} э(\mathbf{C}) - э(\mathbf{C}') = 0, \\ \mathbf{C}' = (\mathbf{E}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)\mathbf{cc} + \mathbf{c}\times\mathbf{E}\sin\varphi)\cdot\mathbf{C}\cdot(\mathbf{E}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)\mathbf{cc} - \mathbf{c}\times\mathbf{E}\sin\varphi), \\ \mathbf{E} = \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3. \end{gathered} \tag{7}$$

Скаляр инвариантный в группе симметрии изотропии остается неизменным при преобразовании поворота на любой угол для любого направления: $э_0(\mathbf{C}) - э_0(\mathbf{C}') = 0$. Обозначим $a = \sin\varphi$, $b = \cos\varphi$; $N = \{1-3, 7-11, 15, 22-34, 41, 51-53, 57-59\}$. Полагая $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3$ из (4), (7) находим

$$\begin{gathered} y_1 = x_1,\ \ y_2 = x_2b^2 - 2x_6ab + x_3a^2,\ \ y_3 = x_2a^2 + 2x_6ab + x_3b^2, \\ y_4 = x_4b - x_5a,\ \ y_5 = x_4a + x_5b,\ \ y_6 = (x_2 - x_3)ab + x_6(b^2 - a^2), \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} y_1 = y_1b^2 + x_3a^2 - 2x_5ab,\ \ y_2 = x_2,\ \ y_3 = x_1a^2 + x_3b^2 + 2x_5ab, \\ y_4 = x_4b - x_6a,\ \ y_5 = (x_1 - x_3)ab + x_5(b^2 - a^2),\ \ y_6 = x_6b + x_4a, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} y_1 = x_1b^2 - 2x_4ab + x_2a^2,\ \ y_2 = x_1a^2 + 2x_4ab + x_2b^2,\ \ y_3 = x_3, \\ y_4 = (x_1 - x_2)ab + x_4(b^2 - a^2),\ \ y_5 = x_5b - x_6a,\ \ y_6 = x_6b + x_5a. \end{gathered} \tag{10}$$

Л е м м а 1. *Для трансверсальной изотропности материала* (1)–(3) *с направлением оси* $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1$ *необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения* $\delta_j = 0\ \ (j \notin N)$ *и*

$$\begin{gathered} \delta_3 = \delta_2,\ \ \delta_8 = \delta_{10},\ \ \delta_{24} = \delta_{23},\ \ \delta_{26} = \delta_{25},\ \ \delta_{29} = \delta_{27},\ \ \delta_{30} = \delta_{28}, \\ \delta_{11} = \delta_7,\ \ \delta_{41} = 2(\delta_{34} - \delta_{33}),\ \ \delta_{51} = \delta_{32},\ \ \delta_{53} = \delta_{33},\ \ \delta_{52} = \delta_{34}, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\delta_{15}=2\delta_2-\delta_9,\ \ \delta_{59}=\delta_{58}=3\delta_{23}-\delta_{28},\ \ \delta_{57}=2\delta_{27}-\delta_{31}. \tag{12}$$

Доказательство. Полагаем последовательно в (8) $\varphi=\pi,\pi/2,\pi/4$. Приравнивая нулю коэффициенты при x_n,x_m и x_n,x_m,x_k форм (5), (6), получаем (11), (12) и $\delta_j=0\ \ (j\notin N)$. Необходимые условия трансверсальной изотропности материала с учетом нулевых значений δ_j являются и достаточными, как следует из тождеств, полученных из (5), (6), (8), (11), (12):

$$э_2(\mathbf{C})-э_2(\mathbf{C}')=(1-a^2-b^2)(2\delta_2(x_2^2+x_3^2+x_6^2)+\delta_7(x_4^2+x_5^2)+2\delta_9(x_2x_3-x_6^2)+\delta_{10}x_1(x_2+x_3))=0,$$

$$э_3(\mathbf{C})-э_3(\mathbf{C}')=(1-a^2-b^2)(3\delta_{23}(x_2+x_3)(x_2^2-x_2x_3+3x_6^2+x_3^2)+\delta_{25}x_1^2(x_2+x_3)+$$
$$+2\delta_{27}x_1(x_2^2+x_3^2+2x_6^2)+3\delta_{28}(x_2+x_3)(x_2x_3-x_6^2)+\delta_{31}x_1(x_6^2-x_2x_3)+\delta_{32}x_1(x_4^2+x_5^2)+$$
$$+2\delta_{33}(x_5^2x_2+x_4^2x_3-2x_4x_5x_6)+2\delta_{34}(x_4^2x_2+x_5^2x_3+2x_4x_5x_6))=0.$$

Лемма 2. *Для трансверсальной изотропности материала* (1)–(3) *с направлением оси* $\mathbf{c}=\mathbf{c}_2$ *необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения* $\delta_j=0\ \ (j\notin N)$ *и*

$$\begin{gathered}\delta_1=\delta_3,\ \ \delta_9=\delta_8,\ \ \delta_{22}=\delta_{24},\ \ \delta_{28}=\delta_{27},\delta_{29}=\delta_{26},\ \ \delta_{30}=\delta_{25},\\ \delta_7=\delta_{15},\ \ \delta_{41}=2(\delta_{51}-\delta_{57}),\quad \delta_{52}=\delta_{58},\ \ \delta_{53}=\delta_{57},\ \ \delta_{59}=\delta_{51},\end{gathered} \tag{13}$$

$$\delta_{11}=2\delta_3-\delta_{10},\ \ \delta_{34}=\delta_{32}=3\delta_{24}-\delta_{26},\ \ \delta_{33}=2\delta_{25}-\delta_{31}. \tag{14}$$

С использованием (9) рассуждения здесь аналогичны, как и в лемме 1 с учетом тождеств

$$э_2(\mathbf{C})-э_2(\mathbf{C}')=(1-a^2-b^2)(2\delta_1(x_1^2+x_3^2+2x_5^2)+\delta_8x_2(x_1+x_3)+2\delta_{10}(x_1x_3-x_5^2)+\delta_{15}(x_4^2+x_6^2))=0,$$

$$э_3(\mathbf{C})-э_3(\mathbf{C}')=(1-a^2-b^2)(3\delta_{24}(x_1+x_3)(x_1^2-x_1x_3+3x_5^2+x_3^2)+2\delta_{25}x_2(x_1^2+x_3^2+2x_5^2)+$$
$$+3\delta_{26}(x_1+x_3)(x_1x_3-x_5^2)+2\delta_{27}x_2^2(x_1+x_3)+\delta_{31}2x_2(x_1x_3-x_5^2)+2\delta_{51}(x_4^2x_1+x_6^2x_3+2x_4x_5x_6)+$$
$$+2\delta_{57}(x_6^2x_1+x_4^2x_3-2x_4x_5x_6)+2\delta_{58}x_2(x_4^2+x_6^2))=0.$$

Лемма 3. *Для трансверсальной изотропности материала* (1)–(3) *с направлением оси* $\mathbf{c}=\mathbf{c}_3$ *необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения* $\delta_j=0\ \ (j\notin N)$ *и*

$$\begin{gathered}\delta_2=\delta_1,\ \ \delta_{10}=\delta_9,\ \ \delta_{23}=\delta_{22},\ \ \delta_{27}=\delta_{25},\ \ \delta_{28}=\delta_{26},\ \ \delta_{30}=\delta_{29},\\ \delta_{15}=\delta_{11},\ \ \delta_{41}=2(\delta_{32}-\delta_{33}),\ \ \delta_{57}=\delta_{33},\ \ \delta_{58}=\delta_{32},\ \ \delta_{59}=\delta_{34}.\end{gathered} \tag{15}$$

$$\delta_7=2\delta_1-\delta_8,\ \ \delta_{52}=\delta_{51}=3\delta_{22}-\delta_{25},\ \ \delta_{53}=2\delta_{26}-\delta_{31}. \tag{16}$$

С использованием (10) рассуждения здесь аналогичны, как в и лемме 1 с учетом тождеств

$$э_2(\mathbf{C})-э_2(\mathbf{C}')=(1-a^2-b^2)(2\delta_2(x_1^2+x_2^2+2x_4^2)+2\delta_8(x_1x_2-x_1^2)+2\delta_9x_3(x_1+x_2)+\delta_{11}(x_5^2+x_6^2))=0,$$

$$э_3(\mathbf{C})-э_3(\mathbf{C}')=(1-a^2-b^2)(3\delta_{22}(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+3x_4^2+x_2^2)+3\delta_{25}(x_1+x_2)(x_1x_2-x_4^2)+$$
$$+2\delta_{26}x_3(x_1^2+x_2^2+2x_4^2)+\delta_{29}x_3^2(x_1+x_2)+\delta_{31}2x_3(x_1x_2-x_4^2)+2\delta_{32}(x_5^2x_1+x_6^2x_2+2x_4x_5x_6)+$$
$$+2\delta_{33}(x_6^2x_1+x_5^2x_2-2x_4x_5x_6)+\delta_{34}x_3(x_5^2+x_6^2))=0.$$

Лемма 4. *Для ортотропного и моноклинного материалов* (1)–(3) *ограничения типа соотношений* (11)–(16) *отсутствуют.*

Доказательство. Рассмотрим моноклинный материал. Скаляр инвариантный в данной группе симметрии остается неизменным при преобразовании поворота на угол $\varphi=\pi$ вокруг направления одной из осей, пусть для определенности это будет $\mathbf{c}_1$. Подставляя в (8) значения $a=0$, $b=-1$ и приравнивая нулю, коэффициенты при x_n,x_m и x_n,x_m,x_k находим в (5), (6) $э_2(\mathbf{C})-э_2(\mathbf{C}')=0$, $\delta_4=\delta_5=\delta_6=\delta_{12}=\delta_{13}=\delta_{14}=\delta_{20}=\delta_{21}=0$; $э_3(\mathbf{C})-э_3(\mathbf{C}')=0$, $\delta_{35}=\delta_{37}=\delta_{39}=\delta_{40}=\delta_{42}=\delta_{43}=\delta_{45}=$ $=\delta_{46}=\delta_{48}=\delta_{49}=\delta_{54}=\delta_{55}=\delta_{60}=\delta_{61}=\delta_{63}=\delta_{64}=\delta_{66}=\delta_{67}=\delta_{70}=\delta_{71}=\delta_{73}=\delta_{74}=\delta_{76}=\delta_{77}=0.$

Ненулевых параметров второй и третьей степени может быть 13 и 32.

Пусть материал является ортотропным и векторы $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3$ определяют оси симметрии материала. Скаляр инвариантный в рассматриваемой группе симметрии остается неизменным при преобразовании поворота на угол $\varphi = \pi$ вокруг направления осей $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$. Заменяя соотношения (8) на (9), дальше таким же образом дополнительно получаем: $э_2(\mathbf{C}) - э_2(\mathbf{C}') = 0$, $\delta_{16} = \delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = 0$; $э_3(\mathbf{C}) - э_3(\mathbf{C}') = 0$, $\delta_{36} = \delta_{38} = \delta_{44} = \delta_{47} = \delta_{50} = \delta_{56} = \delta_{62} = \delta_{65} = \delta_{68} = \delta_{69} = \delta_{72} = \delta_{75} = 0$. Теперь ненулевых параметров второй и третьей степени может быть 9 и 20. При других выборах осей число параметров не изменится. Ограничения типа (11)–(16) отсутствуют, как и для моноклинного материала.

Ограничений для триклинного материала по его определению нет. Ненулевых параметров второй и третьей степени (2), (3) может быть 21 и 56.

З а м е ч а н и е 1. При переходе от изотропного материала к активному процессу нагружения для трансверсально-изотропного, ортотропного, моноклинного и триклинного материалов выполняется $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \sum t_{nm}\mathbf{c}_n\mathbf{c}_m$, где соответственно одна компонента $t_{nn} \neq 0$; более одной $t_{nn} \neq 0$; еще дополнительно одна компонента $t_{nm} \neq 0$ $(n \neq m)$ и более одной $t_{nm} \neq 0$ $(n,m = 1,2,3)$. Примерами таких нагружений являются одноосное растяжение, двухосное сжатие, простой сдвиг и осадка с кручением.

В соотношениях (1)–(3), переходим к мере $\mathbf{G} = 2\mathbf{C} + \mathbf{E}$, поскольку представления через тензор деформации $\mathbf{C}$ более громоздкие. Используя формулу $\dfrac{\partial \mathbf{c}_n \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_m}{\partial \mathbf{G}} = 2^{-1}(\mathbf{c}_n\mathbf{c}_m + \mathbf{c}_n\mathbf{c}_m)$, получаем определяющее уравнение для тензора напряжений Коши [2]:

$$\mathbf{T} = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial э}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j \quad \left(\mathbf{T}_0 = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial э_0}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}},\ \mathbf{T}_j = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial (э_2 + э_3)}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}\right), \tag{17}$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}_e$, неособенный тензор $\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$ (согласно полярному разложению [3]) заменяет деформационный градиент, $\mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}^{-1}$, $\mathbf{O}$ – собственно ортогональный тензор поворота, сопровождающий упругую деформацию, L_3 – третий главный инвариант меры упругих искажений $\mathbf{V}$. Соотношения (1), (17) являются определяющими уравнениями в конечном виде, которые всегда имеют место. Материалы и данные по ним об упругих постоянных для закона Мурнагана, входящих в выражение для $\mathbf{T}_0$, представлены в [3, с. 157–159]. В численных экспериментах использован рекристаллизованный вольфрам. Напряжение текучести при растяжении и сжатии, по которому определяется переход материала в пластическое состояние в остальных случаях нагружений, составляет 450 МПа.

В модели [2] активный упругопластический процесс осуществляется путем попеременных чередований пластических и упругих состояний элементов деформируемого твердого тела, поэтому рост анизотропии происходит только при течении (в пластическом состоянии). Введем дифференциальные определяющие уравнения при течении (в упругом состоянии справедливы другие соотношения). Рассмотрим для упрощения основной первый случай [2], когда выполняется $\mathbf{T} \cdot\cdot\, \mathbf{D} > 0$, $\mathbf{D}$ – тензор скорости деформаций.

Уравнение для тензора напряжений Коши имеет вид

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot\cdot \mathbf{N}\mathbf{N}), \tag{18}$$

где $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$ – объективная производная по времени тензора $\mathbf{T}$, K – малый положительный скаляр, не зависящий от тензора $\mathbf{D}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ – девиатор, определяющий критерий течения, $\mathbf{N}$ – нормированный вектор нормали к поверхности текучести при векторной интерпретации симметричного девиатора.

Уравнение для потенциала напряжений полагаем

$$(L_3^{-1}э)^{\cdot} = (1-\alpha)\mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{D}, \tag{19}$$

где α – близкая к единице относительная часть величины рассеиваемой работы деформации.

Уравнение для параметров анизотропии запишем несколько иначе, чем в [2, 6]:

$$\dot{\delta}_j = \beta k_j \mathbf{N} \cdot\cdot \mathbf{T}_j \left\|\mathbf{T}_j\right\|^{-1} (\mathbf{T}_j \neq 0,\ \beta \geq 0,\ (k_j = \pm 1) \vee (k_j = 0),\ \left\|\mathbf{T}_j\right\| = \sqrt{\mathbf{T}_j \cdot\cdot \mathbf{T}_j}),\ \dot{\delta}_j = 0\ (\mathbf{T}_j = 0). \quad (20)$$

Тензоры $\mathbf{T}_j$ в первом случае (20) взяты с учетом нормировки $(\mathbf{T}_j \left\|\mathbf{T}_j\right\|^{-1} \cdot\cdot \mathbf{T}_j \left\|\mathbf{T}_j\right\|^{-1} = 1)$, поскольку параметры δ_j считаются равноправными. Девиатор $\mathbf{N}$ задает направление действия пластической деформации, порождающей анизотропию. Скаляр β характеризует скорость роста анизотропии, и его можно назвать параметром ее роста.

Лемма 5. *Все ограничения с нулевыми значениями параметров анизотропии удовлетворяются вторым случаем в уравнении* (20).

Теорема. *Определяющие уравнения триклинного упругопластического материала* (1)–(3), (17)–(20) *позволяют описать рост упругой анизотропии, минимизировать величину* β – *параметра ее роста по всем наборам* k_j, $j = \overline{1, 77}$, *и удовлетворить всем ограничениям с нулевыми значениями параметров анизотропии. В особом случае одноосных нагружений, когда первоначально изотропный материал становится трансверсально-изотропным, уравнение* (20) *следует дополнить соотношениями* (12), (14), (16), *а ограничения* (11), (13), (15) *им удовлетворяются.*

Доказательство. Расчет упругопластического процесса производится в квазистатическом режиме. Предполагаем, что поле скоростей перемещений известно, т. е. известны тензор $\mathbf{D}$ и тензор упругого спина $\mathbf{\Omega}$, использующийся при определении объективной производной [7]. Известны также все величины в соотношениях (1), (17). Дифференцируя эти уравнения и подставляя их в соотношения (18), (19) с использованием (20), получаем систему одного тензорного и одного скалярного уравнений относительно неизвестных симметричного тензора $\overset{\Omega}{\mathbf{V}}$ и скаляра β. Она сводится к системе семи скалярных уравнений относительно шести компонент в базисе $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ производной меры упругих искажений и параметра роста анизотропии. Решение системы находим по методу Крамера. Считаем, что определитель системы $\Delta \neq 0$. Для β получаем $\beta^{-1} = (\Delta_7)^{-1}\Delta$. Если $\Delta_7 = 0$, то получаем $\beta = 0$. Пусть выполняется $\Delta_7 \neq 0$. Элементы седьмого столбца матрицы системы представляются в виде $a_{i7} = \sum\limits_j B_{ij} k_j$, а определитель системы $\Delta = \sum\limits_i A_{i7} a_{i7}$ $(i = \overline{1,7})$, где A_{i7} – алгебраические дополнения элементов седьмого столбца. Имеем $\beta^{-1} = (\Delta_7)^{-1} \sum\limits_i A_{i7} \sum\limits_j B_{ij} k_j = \sum\limits_j ((\Delta_7)^{-1} \sum\limits_i A_{i7} B_{ij}) k_j$. Полагаем $k_j = 1$, если $(\Delta_7)^{-1} \sum\limits_i A_{i7} B_{ij} > 0$ и $k_j = -1$, если $(\Delta_7)^{-1} \sum\limits_i A_{i7} B_{ij} < 0$, иначе $k_j = 0$. Следовательно, величина определителя системы выбрана максимальной по абсолютной величине, что гарантирует выполнение условия $\Delta \neq 0$. Значение β получается минимальным по всем наборам k_j. Кроме того, устойчивость расчетов обеспечивается выбором скаляров K, α в (18), (19).

Согласно лемме 5, бóльшая часть ограничений на параметры анизотропии удовлетворяется. Согласно леммам 1–4, ограничения другого вида возникают только в случае трансверсально-изотропного материала, т. е. при одноосных нагружениях. В силу симметрии соотношений (11)–(16) достаточно рассмотреть один случай, когда, например, $\mathbf{c} = \mathbf{c}_3$. Пусть имеет место одноосное сжатие. Тогда выполняются соотношения: вектор нормали $\mathbf{N} = 3^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - 2\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$, тензор упругих искажений $\mathbf{V} = V_1(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2) + V_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$, мера упругих искажений Коши – Грина $\mathbf{G} = G_1(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2) + G_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$, собственно ортогональный тензор упругого поворота $\mathbf{O} = \mathbf{E}$ и вектор $\mathbf{C}_i = \mathbf{O} \cdot \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i$.

Начальные значения параметров анизотропии нулевые, поэтому параметры δ_j в (15), (16) можно заменить на их материальные производные. Согласно второму случаю в (20) (соответствующие $\mathbf{T}_j = 0$), тривиально выполняются соотношения во второй строчке (15): $\dot{\delta}_{15} = \dot{\delta}_{11} = \dot{\delta}_{41} = \dot{\delta}_{32} = \dot{\delta}_{33} = \dot{\delta}_{57} = \dot{\delta}_{58} = \dot{\delta}_{59} = \dot{\delta}_{34} = 0$. Аналогично имеем в (16)

$$\dot{\delta}_7 = \dot{\delta}_{51} = \dot{\delta}_{52} = \dot{\delta}_{53} = 0. \quad (21)$$

Величины в соотношениях первой строки (15) и в правых частях (16) находятся согласно первому случаю в (20). Конкретизируем необходимые выражения в (17):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}_i = L_3^{-1}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V},\ \ \mathbf{T}_{21+i} = 4^{-1}3L_3^{-1}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\quad (i=1,2),\\
&\mathbf{T}_8 = L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V}\cdot((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V},\\
&\mathbf{T}_9 = L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V}\cdot((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V},\\
&\mathbf{T}_{10} = L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V}\cdot((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3)\cdot\mathbf{V},\\
&\mathbf{T}_{25} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}),\\
&\mathbf{T}_{26} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}),\\
&\mathbf{T}_{27} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}),\\
&\mathbf{T}_{28} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}),\\
&\mathbf{T}_{29} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}),\\
&\mathbf{T}_{30} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}),\\
&\mathbf{T}_{31} = 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+\\
&+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}).
\end{aligned}\tag{22}$$

Проверим выполнение шести дифференциальных соотношений в первой строке (15) с использованием (20), (22). Вычисляем $\mathbf{T}_1 = L_3^{-1}(G_1-1)V_1^2\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1$, $\mathbf{T}_2 = L_3^{-1}(G_1-1)V_1^2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$, $\|\mathbf{T}_1\| = L_3^{-1}(G_1-1)V_1^2 = \|\mathbf{T}_2\|$, $\mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_1 = L_3^{-1}3^{-1}(G_1-1)V_1^2 = \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_2$. Значения k_j, как указано выше, определяются знаком величин $(\Delta_7)^{-1}\sum_i A_{i7}B_{ij}$. Имеем $B_{71} = L_3^{-1}4^{-1}(G_1-1)^2 = B_{72}$, значение величины $|A_{77}|$ на три порядка превосходит значения величин $|A_{i7}|$. (Этот факт подтверждается проведенными в данной работе численными экспериментами в случаях, когда аналитическая оценка была затруднена.) Значения величин B_{71} и B_{n1}, а также B_{72} и B_{n2}, являются величинами одного порядка ($n=\overline{1,6}$). Отсюда следует, что значения k_1, k_2 определяются знаками величин $(\Delta_7)^{-1}A_{77}B_{71}$ и $(\Delta_7)^{-1}A_{77}B_{72}$ соответственно. Поскольку знаки последних совпадают, то получаем $k_1 = k_2$, и, значит, $\dot{\delta}_2 = \dot{\delta}_1$. Первое соотношение $\delta_2 = \delta_1$ выполняется. Имеем дальше

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{T}_9\| = L_3^{-1}2^{-1}\sqrt{(G_1-1)^2V_3^2+(G_3-1)^2V_1^2} = \|\mathbf{T}_{10}\|, \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_9 = L_3^{-1}6^{-1}((G_3-1)V_1^2-2(G_1-1)V_3^2 = \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_{10};\\
&\|\mathbf{T}_{22}\| = L_3^{-1}12V_1^2(G_1-1)^2 = \|\mathbf{T}_{23}\|, \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_{22} = L_3^{-1}4^{-1}V_1^2(G_1-1)^2 = \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_{23};\\
&\|\mathbf{T}_{25}\| = L_3^{-1}4V_1^2(G_1-1)^2 = \|\mathbf{T}_{27}\|, \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_{25} = L_3^{-1}4^{-1}V_1^2(G_1-1)^2 = \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_{27};\\
&\|\mathbf{T}_{26}\| = L_3^{-1}2^{-1}\sqrt{(G_1-1)^2(G_3-1)^2V_1^4+V_3^4} = \|\mathbf{T}_{28}\|, \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_{26} = L_3^{-1}12^{-1}((G_1-1)(G_3-1)V_1^2-2V_3^2) = \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_{28};\\
&\|\mathbf{T}_{29}\| = L_3^{-1}4^{-1}\sqrt{4(G_1-1)^2(G_3-1)^2V_3^4+V_1^4} = \|\mathbf{T}_{30}\|,\\
&\mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_{29} = L_3^{-1}12^{-1}(-4(G_1-1)(G_3-1)V_3^2+V_1^2) = \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_{30}.
\end{aligned}$$

Имеют место также равенства $k_{10} = k_9$, $k_{23} = k_{22}$, $k_{27} = k_{25}$, $k_{28} = k_{26}$, $k_{30} = k_{29}$. Следовательно, соотношения в первой строке (15) выполняются.

Вычислим величины в дифференциальной форме в правых частях соотношений (16) по первому случаю в (20): $\|\mathbf{T}_8\| = L_3^{-1}(\sqrt{2})^{-1}V_1^2(G_1-1)$, $\mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_8 = L_3^{-1}3^{-1}V_1^2(G_1-1)$, $2\dot{\delta}_1-\dot{\delta}_8 = (2-3^{-1}\sqrt{2})k_1\beta \neq 0$ ($k_1 = k_8$). Имеем из (21) $\delta_7 = 0$. Первое соотношение в (16) не выполняется. Аналогично не выполняется второе соотношение: $3\dot{\delta}_{22}-\dot{\delta}_{25} = (9-\sqrt{5})k_{22}\beta \neq 0$ $(k_{22} = k_{25})$. Невыполнение третьего соотношения $2\dot{\delta}_{26}-\dot{\delta}_{31} \neq 0$ не столь очевидно. Здесь также можно сослаться на данные проведенных вычислительных экспериментов. Одноосные нагружения являются базовыми экспериментами, поэтому уравнение (20) требуется дополнить соотношениями (12), (14), (16).

З а м е ч а н и е 2. В [3] отмечен еще и кубически изотропный материал. Скаляр инвариантный в группе симметрии кубической изотропии остается неизменным при преобразовании поворота на угол π / 2 вокруг направления осей $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_3$. Аналогично получаем возможные ненулевые параметры δ_j, которые можно разделить на 9 групп: $j\in\{1,2,3\}$, $j\in\{8,9,10\}$, $j\in\{22,23,24\}$, $j\in\{25,26,27,28,29,30\}$, $j\in\{7,11,15\}$, $j\in\{32,34,51,52,58,59\}$, $j\in\{33,53,57\}$, $j=31$, $j=41$. Значения параметров из первых 7 групп совпадают. Однако кубическая анизотропия не является деформационной, т. е. возникающей в результате пластической деформации первоначально изотропного материала. В самом деле, по определению кубическая анизотропия является разновидностью ортотропной. Самый благоприятный пример для удовлетворения указанным соотношениям представляет собой растяжение (сжатие) по первой, второй или третьей оси и равные сжатия (растяжения) с учетом несжимаемости по двум другим осям. Получаются обычные одноосные нагружения при наложении дополнительного переменного гидростатического давления. Поскольку гидростатическое давление не изменяет вида анизотропии, то в результате пластической деформации образуется трансверсально-изотропный материал.

Выводы. В математически строгой нелинейной теории упругопластичности, в отличие от линейной теории, постулируемые определяющие уравнения, которые описывают поведение материала деформируемого твердого тела, должны быть справедливы во всех частных случаях. Поэтому при формулировке определяющего уравнения для параметров анизотропии рассматривался материал общего вида анизотропии – триклинный. Проверялась пригодность уравнения (20) для описания полученных ограничений. В результате для частных видов анизотропии найдены формально непротиворечивые определяющие соотношения (20), (12), (14), (16), которые подлежат дальнейшей экспериментальной проверке. Реализована процедура минимизации параметра роста анизотропии в (20).

Список использованных источников

1. *Naghdi, P. M.* A critical review of the state of finite plasticity / P. M. Naghdi // ZAMP. – 1990. – Vol. 41, № 3. – P. 315–394.

2. *Швед, О. Л.* Модель нелинейно упругопластического материала / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 63–68.

3. *Лурье, А. И.* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

4. *Murnaghan, F. D.* Finite Deformation of an Elastic Solid / F. D. Murnaghan. – New York: Wiley; London: Chapman & Hall, 1951. – 140 p.

5. *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 711 с.

6. *Швед, О. Л.* Критерий разрушения в модели моноклинного упругопластического материала / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2015. – № 4. – С. 46–53.

7. *Швед, О. Л.* Определение тензора упругого спина в нелинейной теории пластичности / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 52–58.

References

1. Naghdi P.M. A critical review of the state of finite plasticity. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physic*, 1990, vol. 41, no. 3, pp. 315–394. Doi: 10.1007/bf00959986

2. Shved O.L. Model of nonlinear elastic-plastic material. *Vestsi Natsyianalnai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2014, no. 1, pp. 63–68. (In Russian).

3. Lur'e A.I. *Nonlinear Elasticity Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1980. 512 p. (In Russian).

4. Murnaghan F.D. *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York: Wiley; London: Chapman & Hall, 1951. 140 p.

5. Rabotnov Yu.N. *Fracture mechanics*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 711 p. (In Russian).

6. Shved O.L. Failure criterion in the model of monoclinic elastic-plastic material. *Vestsi Natsyianalnai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika- tekhnichnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physico-Technical series], 2015, no. 4, pp. 46–53. (In Russian).

7. Shved O.L. Determination of the elastic spin tensor in the nonlinear theory of plasticity. *Vestsi Natsyianalnai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2009, no. 1, pp. 52–58. (In Russian).

Информация об авторе

Швед Олег Лаврентьевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории исследования операций, Объединенный институт проблем информатики Национальной Академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: swed@newman.bas-net.by

Information about author

Shved Oleg Lavrent'evich – Ph. D. (Technical), Leading Researcher of the Operational Research Laboratory, United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganonov Str., Minsk, 220012, Belarus). E-mail: swed@newman.bas-net.by

Для цитирования

Швед, О. Л. Учет упругой анизотропии триклинного упругопластического материала / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 89–97.

For citation

Shved O.L. Considering the increase in elastic anisotropy of triclinic elastic-plastic material. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 89–97. (In Russian).